

GRAFICANDO FUNCIONES

Claudia Barrera R.

ESNAVAL

- Analizaremos definiciones y teoremas que nos ayudaran a **graficar** de manera precisa una función.

- Analizaremos definiciones y teoremas que nos ayudaran a **graficar** de manera precisa una función.
- En una primera etapa, consideraremos una función f con $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.



¿Porqué cree usted que es importante la gráfica de una función?



¿Qué conceptos estudiados se podrían utilizar para poder graficar?

Definición:

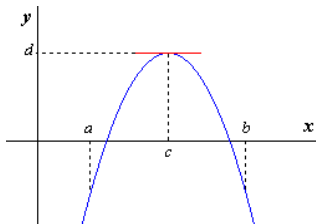
- Se dice que la función f tiene un valor **máximo relativo** en el número $c \in]a, b[$ si:

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]a, b[$$

Definición:

- Se dice que la función f tiene un valor **máximo relativo** en el número $c \in]a, b[$ si:

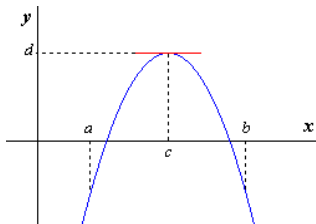
$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]a, b[$$



Definición:

- Se dice que la función f tiene un valor **máximo relativo** en el número $c \in]a, b[$ si:

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in]a, b[$$



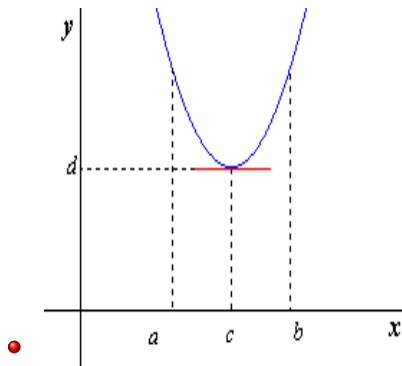
- Observar que el valor máximo relativo de f en $]a, b[$ es d .

- Analogamente, diremos que f tiene un **mínimo relativo** en c si:

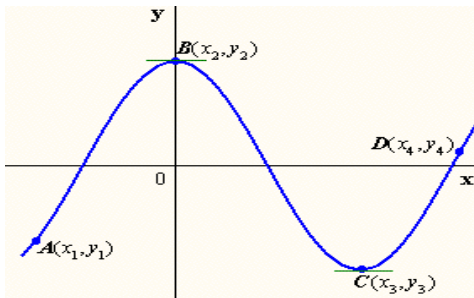
$$f(c) \leq f(x), \forall x \in]a, b[$$

- Analogamente, diremos que f tiene un **mínimo relativo** en c si:

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in]a, b[$$



Si una función tiene un valor máximo o mínimo relativo, entonces se dice que la función tiene un **extremos relativo**.



Más adelante tendremos un criterio para determinar máximos y mínimos usando la derivada....

¿Porqué cree usted que la derivada nos ayudará?



Definición

Dada una función f , si $c \in \text{dom}(f)$, diremos que c es un número o valor crítico de f si:

$$f'(c) = 0 \text{ o } f'(c) \text{ no existe}$$

Observación: Un **punto crítico** es $P(c, f(c))$

- Ejercicio 1:

- Ejercicio 1:

- Determine los valores y puntos críticos de la función:

- Ejercicio 1:

- Determine los valores y puntos críticos de la función:



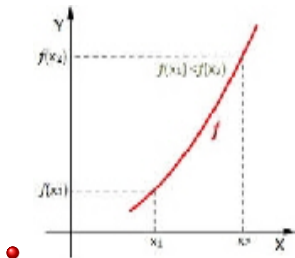
$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

Definición

- Una función f definida en $]a, b[$ será **creciente** en $]a, b[$ si se cumple:
 $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$, $x_1, x_2 \in]a, b[$.

Definición

- Una función f definida en $]a, b[$ será **creciente** en $]a, b[$ si se cumple:
 $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$, $x_1, x_2 \in]a, b[$.

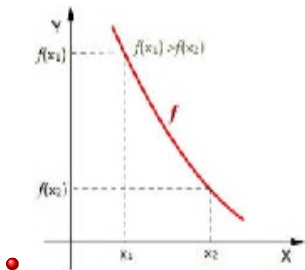


Definición

- Una función f definida en $]a, b[$ será **decreciente** en $]a, b[$ si se cumple: $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, $x_1, x_2 \in]a, b[$

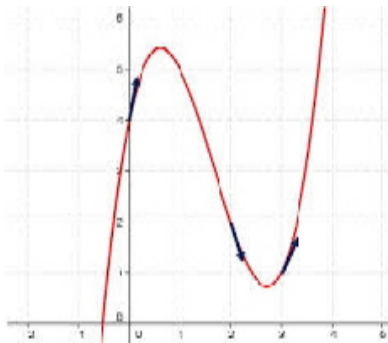
Definición

- Una función f definida en $]a, b[$ será **decreciente** en $]a, b[$ si se cumple: $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, $x_1, x_2 \in]a, b[$



Observación

Una función que siempre es creciente o decreciente en un intervalo, se dice que es **monótona** en ese intervalo.



La derivada puede ayudarnos a analizar la monotonía de una función
¿ por qué y de qué manera?



- **TEOREMA 1: (MONOTONÍA)**

- **TEOREMA 1: (MONOTONÍA)**

- Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , se tiene que:

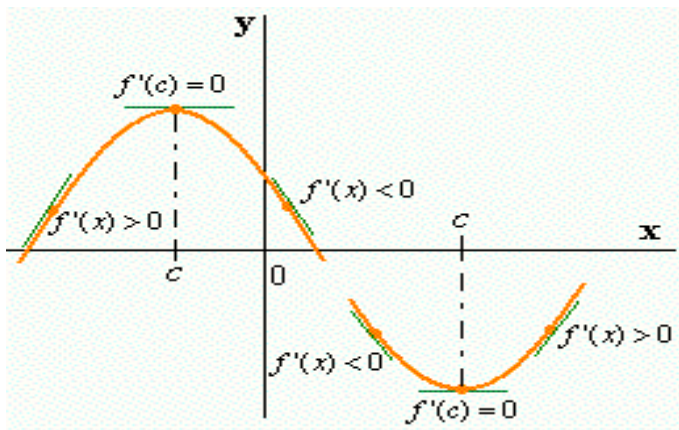
- **TEOREMA 1: (MONOTONÍA)**

- Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, se tiene que:
 - a) Si $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$

- **TEOREMA 1: (MONOTONÍA)**

- Sea f una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, se tiene que:
 - a) Si $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
 - b) Si $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

TEOREMA 2: (CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS)



- Ejercicio 2:

• Ejercicio 2:

- A partir de lo obtenido en el ejercicio 1 y aplicando las definiciones y/o teoremas anteriores, determine monotonía y extremos de la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

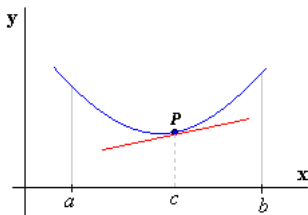
- Definición:

- Definición:

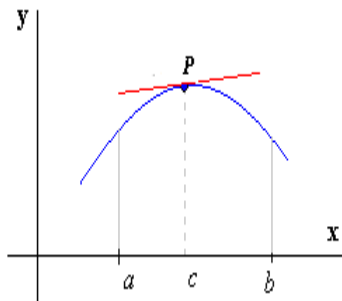
- a) Sea f derivable en un número c , se dice que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo $]a, b[$ que contenga a c , tal que en $]a, b[$ la gráfica de f está arriba de la recta tangente en P .

- Definición:

- a) Sea f derivable en un número c , se dice que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo $]a, b[$ que contenga a c , tal que en $]a, b[$ la gráfica de f está arriba de la recta tangente en P .



b) Analogamente, f es cóncava hacia abajo en el punto $P(c, f(c))$ si la gráfica de f está por debajo de la recta tangente en P .



• TEOREMA 3: (PRUEBA DE LA CONCAVIDAD)

• TEOREMA 3: (PRUEBA DE LA CONCAVIDAD)

- Sea f una función continua en $[a, b]$, diferenciable en $]a, b[$ y $c \in]a, b[$ tal que $f''(c)$ existe, luego:

• TEOREMA 3: (PRUEBA DE LA CONCAVIDAD)

- Sea f una función continua en $[a, b]$, diferenciable en $]a, b[$ y $c \in]a, b[$ tal que $f''(c)$ existe, luego:
 - a) Si $f''(c) > 0$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $P(c, f(c))$.

• TEOREMA 3: (PRUEBA DE LA CONCAVIDAD)

- Sea f una función continua en $[a, b]$, diferenciable en $]a, b[$ y $c \in]a, b[$ tal que $f''(c)$ existe, luego:
 - a) Si $f''(c) > 0$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $P(c, f(c))$.
 - b) Si $f''(c) < 0$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $P(c, f(c))$.

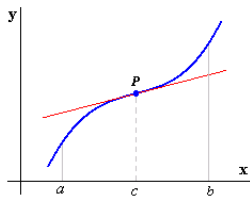
- Definición

• Definición

- Se dice que $P(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de una función f , si existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $c \in]a, b[$, y la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $]a, c[$, y cóncava hacia abajo sobre $]c, b[$, o vice versa.

Definición

- Se dice que $P(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de una función f , si existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $c \in]a, b[$, y la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $]a, c[$, y cóncava hacia abajo sobre $]c, b[$, o vice versa.



TEOREMA 4:

Si $P(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f y $f''(c)$ existe, entonces $f''(c) = 0$.

- **TEOREMA 5:** (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS)

- **TEOREMA 5:** (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS)

- Supongamos que f' existe para todo x en un intervalo abierto que contiene a c , sea c un valor crítico y $f''(c)$ existe:

- **TEOREMA 5:** (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS)
- Supongamos que f' existe para todo x en un intervalo abierto que contiene a c , sea c un valor crítico y $f''(c)$ existe:
- 1) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c .

- **TEOREMA 5:** (PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS)
- Supongamos que f' existe para todo x en un intervalo abierto que contiene a c , sea c un valor crítico y $f''(c)$ existe:
- 1) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c .
- 2) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c .

- Ejercicio 3:

• Ejercicio 3:

- A partir del ejercicio 1 , 2 y las definiciones y/o teoremas anteriores, determine puntos de inflexión, concavidad y extremos de la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

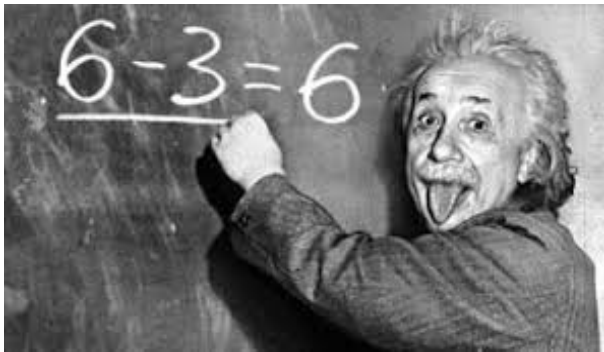
- Ejercicio 4:

- Ejercicio 4:

- Utilizando todos sus cálculos obtenidos en el ejercicio 1, 2 y 3 grafique la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

¿Qué hemos aprendido hoy?



Anote y describa los pasos que debe seguir para poder graficar una función

Calcular f'

Valores y Puntos Críticos

$$f'=0$$

Tabla

$$f'>0 \text{ y } f'<0$$

Determinar

Monotonía y Extremos

Calcular f''

PPI

$$f''=0$$

Tabla

$$f''>0 \text{ y } f''<0$$