

EDO

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Catherine Hardy

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una igualdad que contiene una o más derivadas de una función desconocida.

Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + x = \cos(x)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

$$y''' - y'' = x$$

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden

EDO: Una ecuación diferencial es ordinaria cuando la función incógnita depende de una sola variable

Una solución de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación

Ejemplos:

1) Comprobar si la función $f(x) = e^{-3x} + 5$ es solución de la ecuación diferencial $y' + 3y = 15$

2) Verificar si la función $g(x) = \frac{1}{x} + x$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones diferenciales de variables separables

- **Definición:** Se dice que una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables si se puede escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Esta ecuación se expresa en forma diferencial de la forma:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Y se resuelve integrando ambos miembros

Se llama solución general a la EDO de primer orden a la función que depende de una constante arbitraria C

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = 3x$$

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$3) \quad \frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos(x)}{1 - 2y}$$

$$6) \quad \frac{dy}{dx} + e^{x-y} = 0$$

$$7) \quad (yx - y)dy - (y + 1)dx = 0$$

Problemas de valor inicial

Dada una condición inicial de una EDO de primer orden, podemos obtener una **solución particular** de ella (ya que es posible obtener el valor de la constante C)

- Ejemplos

1) Resolver el problema de valor inicial

$$1 + e^{-3x}y' = 0 \text{ sujeto a } y(0) = 1$$

2) Resolver el problema de valor inicial

$$y' + y^2 - y = 0; \quad y(2) = 4$$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

- **Definición:** La función $f(x, y)$ se llama HOMOGÉNEA de grado n respecto a las variables x e y , si para todo t se verifica:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = 2x^3 - 5xy^2 + 4y^3$$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^3 - 5(tx)(ty)^2 + 4(ty)^3 \\ &= 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 + 4t^3y^3 \\ &= t^3(2x^3 - 5xy^2 + 4y^3) \\ &= t^3f(x, y) \end{aligned}$$

f es función homogénea de grado 3

- **Definición:**

Se dice que la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es HOMOGÉNEA si las funciones M y N son homogéneas y del mismo grado.

Método de solución:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

1. Sustituir $x = yv$, si M es de “estructura más simple” que N
2. Sustituir $y = xv$, si N es de “estructura más simple” que M

Al hacer estas sustituciones obtendremos integrales más fáciles de calcular

Ejemplo:

¿Cuál es mas simple algebraicamente?
¿ M o N ?

$$\begin{array}{cc} M & N \\ \uparrow & \uparrow \\ (x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0 \end{array}$$

Sustitución:

$$y = xv \quad /d$$

$$dy = xdv + vdx$$

Reemplazando:

$$(x^3 + (xv)^3)dx - x(xv)^2(xdv + vdx) = 0$$

$$x^3dx + x^3v^3dx - x^4v^2dv - x^3v^3dx = 0$$

$$x^3dx = x^4v^2dv$$

$$v^2dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^3}{3} = \ln|x| + C$$

Sustituyendo

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y^3}{x^3} = 3\ln|x| + 3C$$

$$y^3 = x^3(3\ln|x| + 3C)$$

$$y^3 = \sqrt[3]{x^3(3\ln|x| + 3C)}$$

Ejercicios

1. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$

2. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$