

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sea $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R} ; y = f(x) ; g : \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R} ; y = g(x) ; \alpha \in \mathbb{R}$, entonces se define:

a) suma:

$$f + g : \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b) producto por escalar:

$$\alpha f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

c) multiplicación:

$$f \cdot g : \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

d) División:

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Donde } D = \{x \in (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) \wedge g(x) \neq 0\}$$

Ejemplos

Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x - 4$$

$$g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = 3 - x$$

$$h : \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \frac{2-x}{x-5}$$

$$t : [-3; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; t(x) = \sqrt{x-3}$$

Determine y defina formalmente las siguientes funciones:

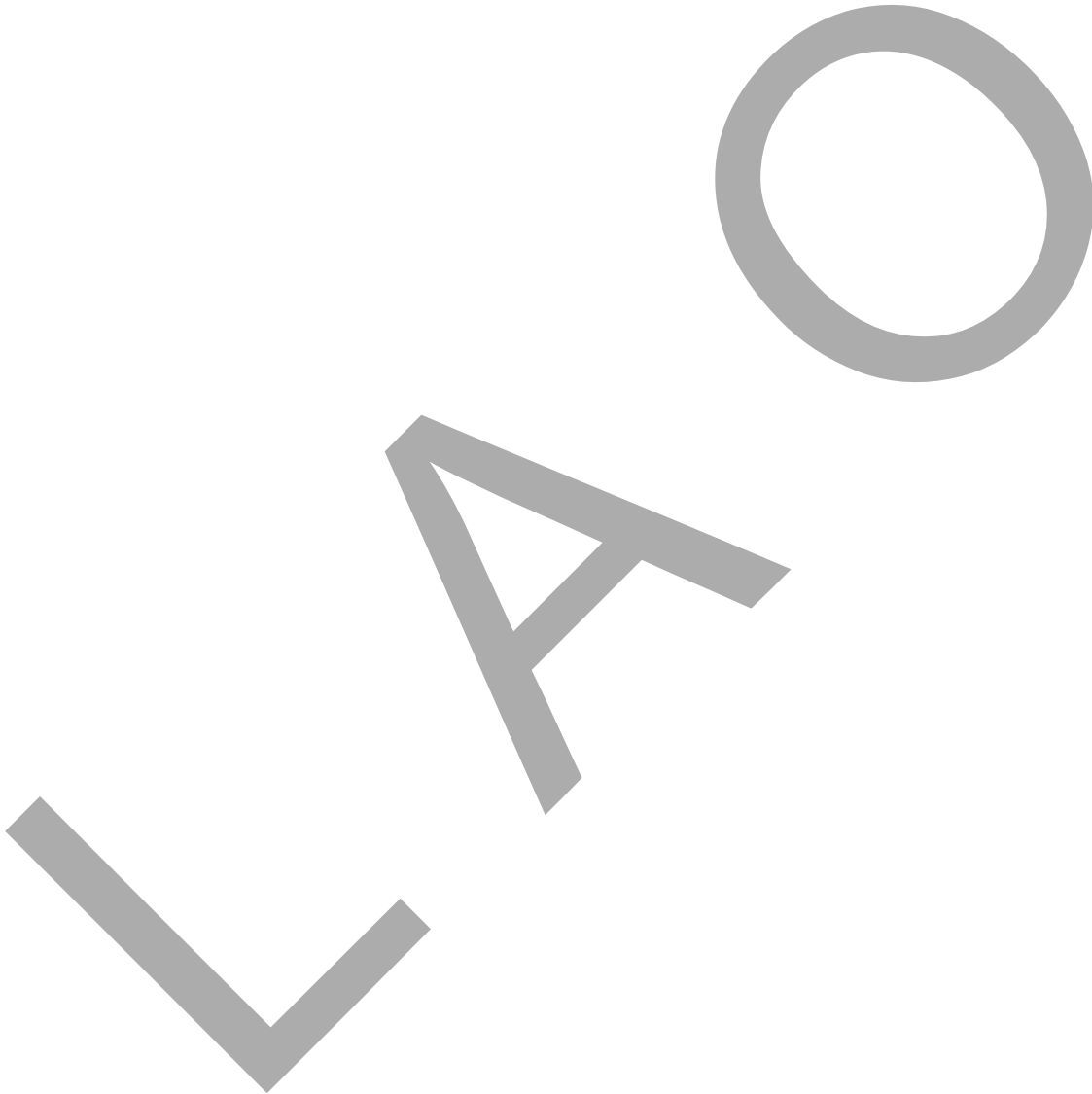
1) $f \cdot t$

2) $h - g$

3) $g + f$

4) $\frac{2f + g}{t}$

5) $f \cdot (3t - 2h)$



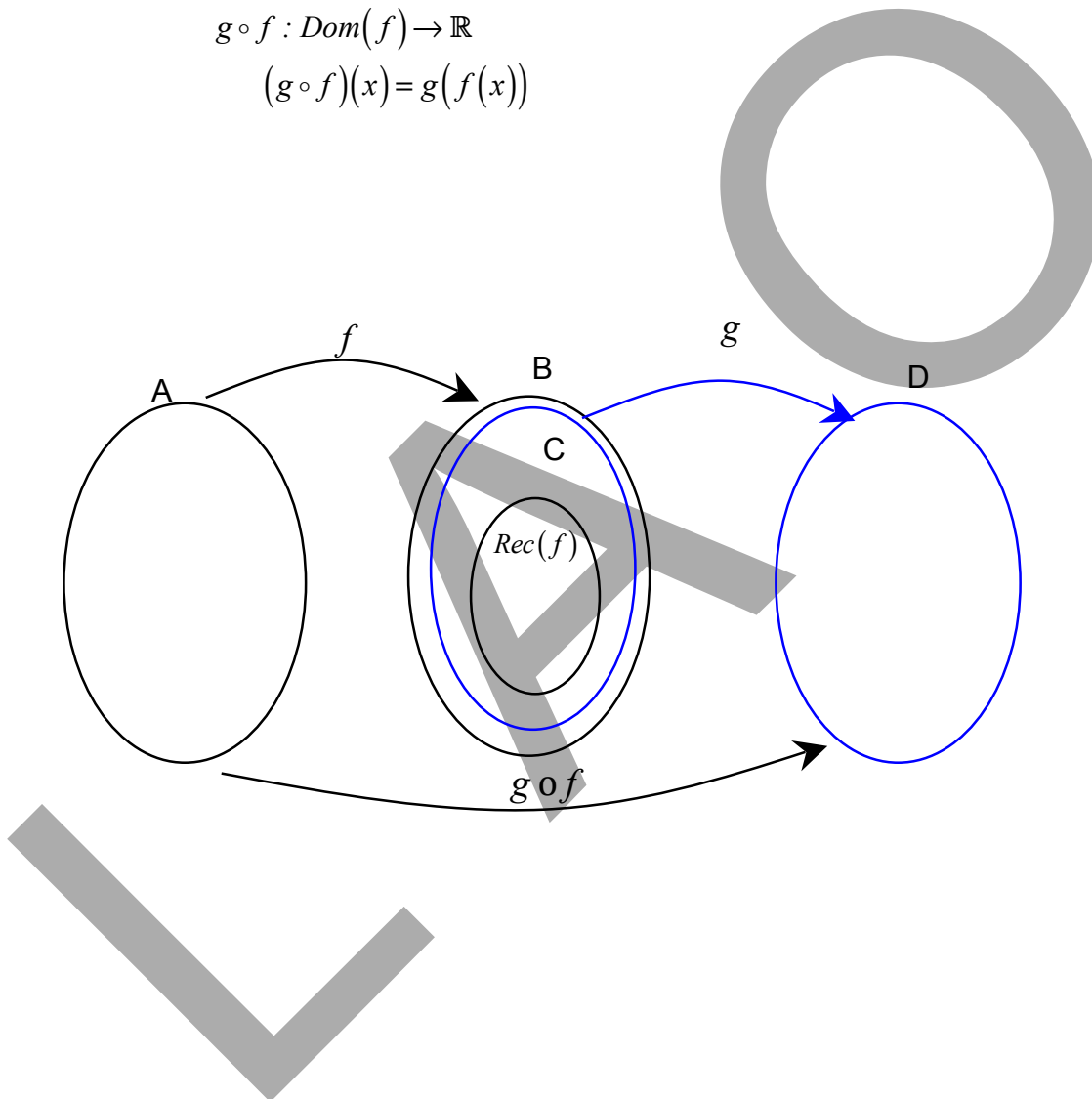
COMPUESTA DE FUNCIONES

DEFINICIÓN:

Sea $f: A \rightarrow B$; $y = f(x)$; $g: C \rightarrow D$; $y = g(x)$ funciones, entonces existe f compuesta con g , y se escribe $g \circ f$ si y sólo si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ y se define como:

$$g \circ f: Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

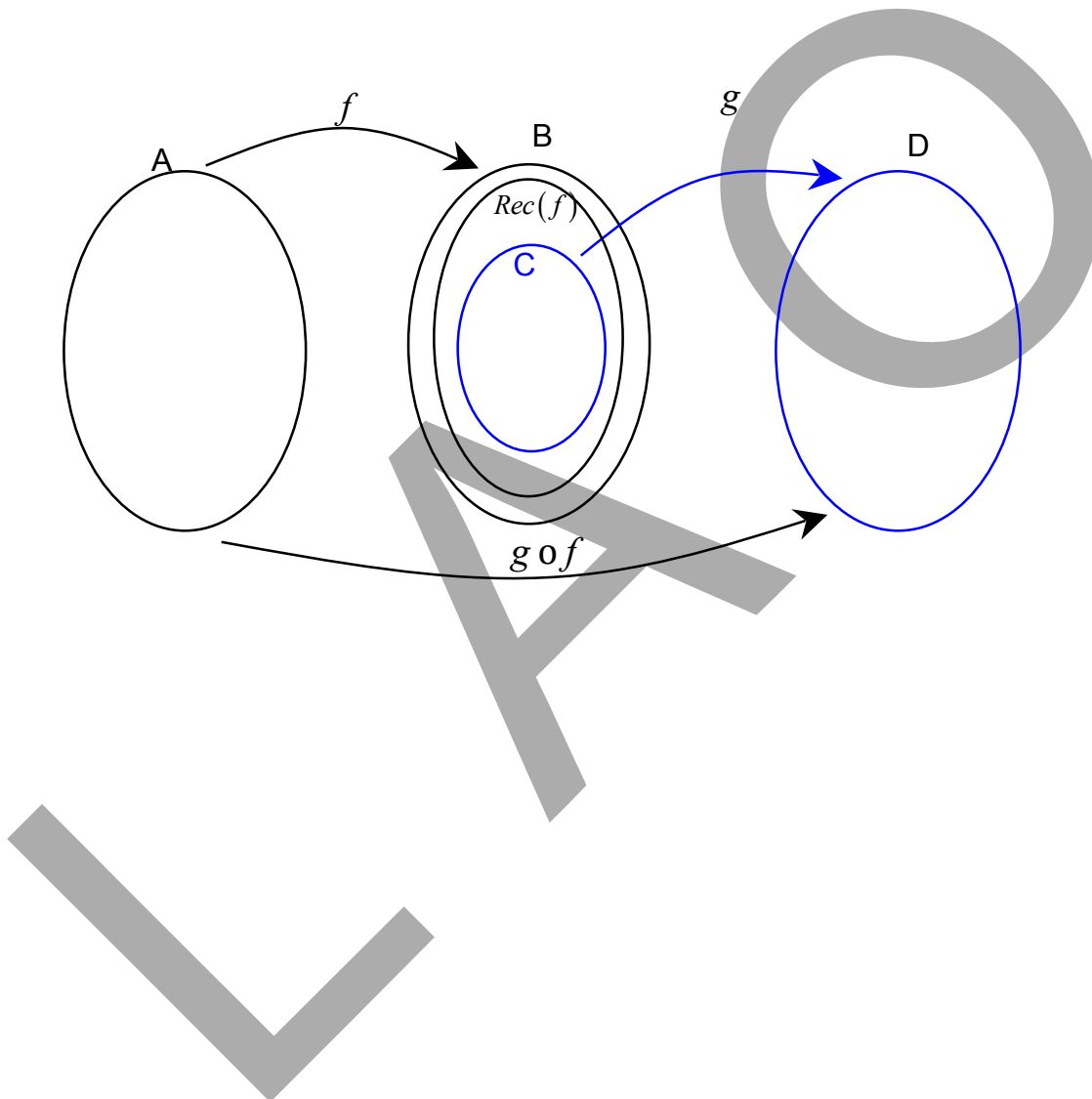
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



OBSERVACIÓN:

Si $\text{Rec}(f) \not\subseteq \text{Dom}(g)$, entonces el dominio de $g \circ f$ se define como:

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$



Ejemplo:

Determine si existe la compuesta $g \circ f$, si no es así haga las restricciones necesarias y defina formalmente.

$$1) f(x) = \sqrt{x-1} \quad ; \quad g(x) = 2x-3$$

$$\exists g \circ f \text{ ssi } \text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \quad \text{Dom}(f) = [1, \infty[$$

$$\begin{aligned} \text{Rec}(f) = \\ y = \sqrt{x-1} \quad \text{rest : } y \geq 0 \\ S_R = [0, \infty[\end{aligned}$$

$$\therefore y^2 = x-1$$

$$y^2 + 1 = x \quad \text{no hay restricción}$$

$$\therefore \text{Rec}(f) = [0, \infty[$$

$$\text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$$

$$[0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$$

$\forall$

$$\exists g \circ f \quad \text{y se define :}$$

$$g \circ f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(2x-3)$$

$$= \sqrt{(2x-3)-1}$$

$$2) \quad f(x) = 3x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$\exists g \circ f \text{ ssi } \text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}(g) = [-2; \infty[\quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Rec}(f) =$$

$$y = 3x$$

$$\therefore \frac{y}{3} = x$$

no hay restricción

$$\therefore \text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$$

$$\mathbb{R} \subseteq [-2, \infty[$$

F

NO existe $g \circ f$ y

Entonces se define $\text{Dom}(g \circ f)$ como

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3x \in \left[-2, \infty \right[\right\}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3x \geq -2 \right\}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{-2}{3} \right\}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left[\frac{-2}{3}, \infty \right[\right\} \text{ intersectando...}$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \left[\frac{-2}{3}, \infty \right[$$

$$g \circ f : \left[\frac{-2}{3}, \infty \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(3x)$$

$$= \sqrt{3x+2}$$

EJEMPLO:

Determine la compuesta $(f \circ g)(5)$, si:

$$f : \left[-3, \infty \right[\rightarrow \mathbb{R} ; y = \sqrt{x+3}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; y = 2 + 4x$$

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$$= f(2 + 4(5))$$

$$= f(22)$$

$$= \sqrt{22+3}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = 5$$

EJERCICIOS:

Determine la compuesta indicada, si:

$$f : [-3, \infty[\rightarrow \mathbb{R} ; y = \sqrt{x+3}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; y = 2 + 4x$$

$$h : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} ; y = \frac{5}{x-2}$$

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; y = 2x^2 - 8$$

1) $(f \circ g)(1) =$

2) $(f \circ g)(0) =$

3) $(h \circ g)(1) =$

4) $(h \circ g)(-3) =$

5) $(g \circ k)(-1) =$

6) $(h \circ k)(2) =$

