

Taller N°3.

Tema: MAA.

Objetivos:

- ✓ Establecer la ecuación general para un M.A.A.

Introducción.

En el movimiento armónico simple los límites del movimiento están igualmente espaciados a uno y otro lado de la posición de equilibrio, para obtener esta condición se despreciaron los efectos de las fuerzas disipativas. Si esta suposición fuese estricta, una masa suspendida de un resorte oscilaría con la misma amplitud indefinidamente.

Como es de conocimiento común, las oscilaciones reales después de un tiempo desaparecen, dado que todo sistema tiene inevitablemente ciertas características disipativas mediante las cuales se va perdiendo la energía mecánica de vibración. En realidad la amplitud disminuye poco a poco hasta que finalmente la masa llega al reposo, debido a las fuerzas de roce (estas fuerzas pueden provenir de la resistencia del aire o de fuerzas internas). A este tipo de movimiento se le llama **Movimiento Amortiguado**. Bajo condiciones especiales es posible que las fuerzas disipativas sean pequeñas y de origen a un **Movimiento Armónico Amortiguado**.

Concepto Clave.

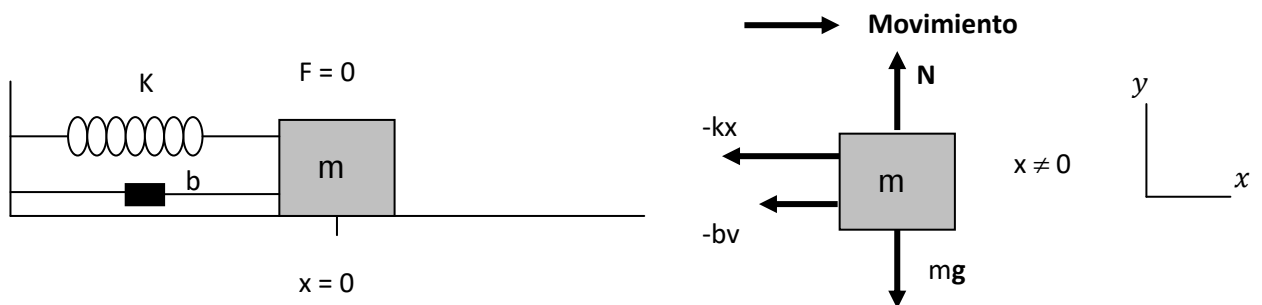
- Movimiento Armónico Amortiguado.

Actividad 1: "Movimiento armónico Amortiguado (M.A.A)".

Si un péndulo oscila libremente, siempre termina deteniéndose porque las fuerzas de rozamiento disminuyen su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado**. Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo el caso de un péndulo que oscila en aceite, el oscilador no alcanza a ejecutar una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **Sobreamortiguado**. Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **Subamortiguado o Bajoamortiguado**. Cuando se

tiene una compensación del efecto restaurador con el efecto disipador, se produce el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio, se dice que el sistema está **Amortiguado críticamente**. (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado).

Para analizar los movimientos disipativos, consideremos un sistema masa resorte que se encuentra afecto tanto a una fuerza elástica ($-Kx$) como a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad pero con dirección opuesta a la dirección del movimiento. ($-bv$)



Utilizando el diagrama de cuerpo libre y aplicando Segunda Ley de Newton:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\text{Ejex: } \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_x$$

$$-kx - bv = ma \quad \text{ec. (1)}$$

$$\text{Ejey: } \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_y$$

$$N - Mg = 0 \quad \text{ec. (2)}$$

Analizando ec. (1):

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad / : m$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{b}{m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{ec. (3)}$$

Considerando:

$$\gamma = \frac{b}{2m}: \text{coeficiente de amortiguamiento.}$$

b: constante de amortiguación.

$$w_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}: \text{frecuencia natural del sistema.}$$

Es posible escribir la ec. (3), de la siguiente manera:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + w_0^2 x = 0$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de primer grado y segundo orden, la cual tiene tres tipos de solución, según sea el efecto disipativo menor, igual o mayor que el efecto restaurador. Cada caso define las oscilaciones Bajo amortiguada, Críticamente amortiguada y Sobre amortiguada respectivamente.

La única solución que consideraremos aquí es aquella que representa efectos disipativos pequeños y que dan origen a oscilaciones armónicas amortiguadas.

La solución para dichas oscilaciones es:

$$x(t) = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(w_a t + \varphi)$$

En esta expresión, se considera que la amplitud del movimiento decrece exponencialmente con el tiempo según la expresión:

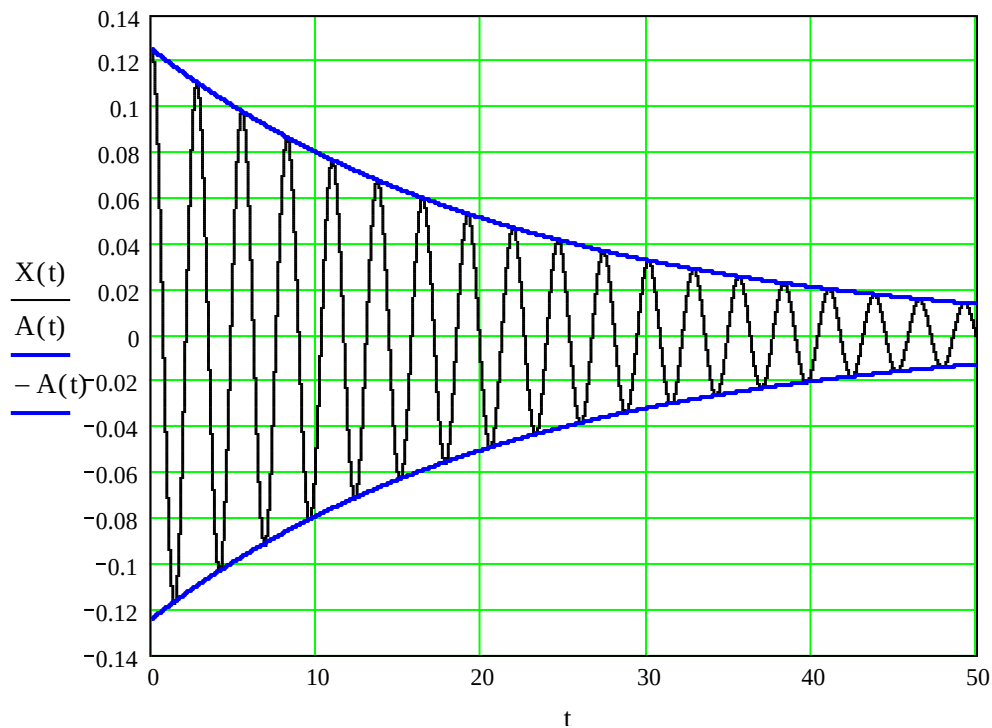
$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

La frecuencia de oscilación del movimiento difiere de la frecuencia natural (sin disipación) según la expresión:

$$w = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Actividad 2: " $x = x(t)$ ".

- Grafique la expresión obtenida para el M.A.A.
- Muestre en el gráfico las componentes de la ecuación del M.A.A.
- Establezca las conclusiones correspondientes.
- Compare sus resultados con la gráfica siguiente.



La curva azul representa la amplitud de la oscilación y refleja la envolvente de la curva cosenoidal.

Note que la frecuencia disminuye respecto de la frecuencia natural de oscilación del sistema.

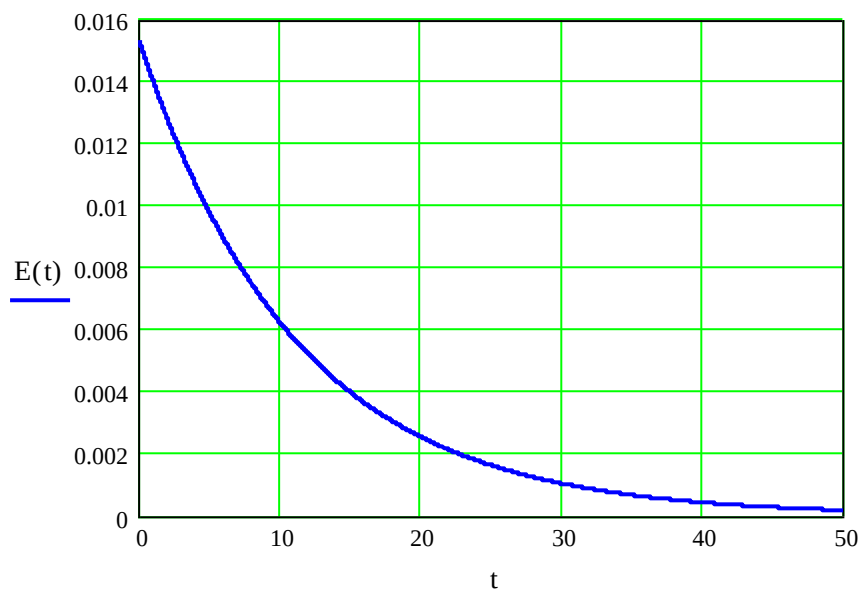
t

Actividad 3: “Energía del Movimiento Sub-amortiguado”.

Un sistema que cumple con la ecuación anterior se dice que está amortiguado linealmente. Encuentre la energía mecánica total del sistema y compruebe que está decrece según la expresión:

$$E(t) = \left(\frac{K}{2}\right) A(t)^2 = \left(\frac{K}{2}\right) A_0^2 e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t} = E_0 e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t}$$

La gráfica que representa el comportamiento de la energía mecánica es del tipo:



Se define:

$\tau = \frac{b}{m}$, como el tiempo de extinción o constante de tiempo. La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor “e”.

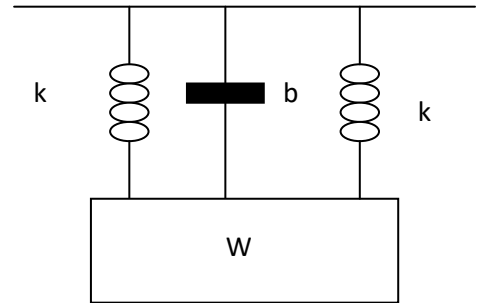
Actividad 4: “Ejemplo”.

Dado el siguiente sistema amortiguado, hallar:

- A) La frecuencia natural del sistema.
- B) El coeficiente de amortiguamiento.

La velocidad para $t = 0$ es $1,2 \text{ [m/s]}$, hallar:

- C) La amplitud.
- D) La elongación para un tiempo “ t ”.
- E) La velocidad para un tiempo “ t ”.



DATOS: $b = 149 \text{ [Ns/m]}$; $k = 178 \text{ [N/m]}$; $W = 178 \text{ [N]}$

Resp: (a) $\omega_0 = (2K/m)^{0,5}$; (b) $4,1 \text{ rad/s}$; (c) $-0,3 \text{ m}$.

Actividad 5: “Tarea”.

6.1. Averigüe acerca de los diferentes tipos de amortiguamiento, graficando e indicando las condiciones para que se produzcan.

6.2. ¿Cuándo ocurre resonancia?. De un ejemplo.

Actividad 6: “Bibliografía”.

- ✓ Halliday, Resnick, Walker-Física Vol 1- Pág 17- Editorial CECSA-2001.
- ✓ Tipler-Física, conceptos y aplicaciones-Pág 14-Editorial McGraw Hill-01.
- ✓ Sears, Zemansky, Young, Freedman-Física-Vol 1-Pág 13-Editorial Pearson Educación.
- ✓ Tipler, Mosca. Física para la Ciencia y la Tecnología. Vol 1. Pág 14. Editorial Reverte.